□19□ □□□□□□□□□□□□□□

□□□□□

1□□2021·□□□□·□□□□□□□□□□□ $f(x)=\ln x$ □ $g(x)=ax^2+bx+1$ □□□ $a,b\in \mathbf{R}$ □

□1□□ $a=0$ □□□□ $y=g(x)$ □□□ $y=f(x)$ □□□□□□□ b □□□

□2□□ $a\neq 0$ □□□□□□ $x>0$ □□□ $f(x)\leq g(x)$ □□□□□ $\frac{b}{a}$ □□□□□

□□□□□1□ $b=\frac{1}{e^2}$ □□2□ $\frac{b}{a}$ □□□□□ $-e$·

□□□□

□1□□□□□□□ b □

□2□□□ $f(x)\leq g(x)$ □□□□□□□ $\frac{\ln x-1}{x}\leq ax+b$ □□□ $x>0$ □□□□□□□□□□□□□□□□ $-\frac{b}{a}\leq e$ □□□□□ $\frac{b}{a}$ □□□□.

□□□□

□1□□ $a=0$ □□□□ $g(x)=bx+1$ □□□ $y=f(x)$ □□□□□□ $P(x_0,y_0)$ □

□□ $f(x)=\ln x$ □□□ $f'(x)=\frac{1}{x}$ □

□ $\frac{1}{x_0}=b$ □ $bx_0+1=\ln x_0$ □□ $b\cdot\frac{1}{b}+1=\ln\frac{1}{b}$ □□□□ $b=\frac{1}{e^2}$.

□2□□□□□ $x>0$ □□□ $f(x)\leq g(x)$ □□□□□ $\ln x-1\leq ax^2+bx$.

□□ $a<0$ □□□ $x>e$ □□ $\ln x-1>0$ □

□□ $x>\max\left\{0,-\frac{b}{a}\right\}$ □□ $ax^2+bx<0$.

□ $x_0=\max\left\{e,-\frac{b}{a}\right\}$ □□□ $x>x_0$ □□ $\ln x-1>0$ □

□ $ax^2+bx<0$ □□□□□ $a>0$.

□ $x=e$ □□□ $f(e)\leq g(e)$ □□ $ae^2+be\geq 0$ □□ $\frac{b}{a}\geq -e$.

□□□ $\frac{b}{a}$ □□□ $-e$.

□ $a=\frac{1}{e^2}, b=-\frac{1}{e}$ □□ $\frac{b}{a}=-e$.

□ $F(x)=\ln x-\frac{x}{e}(x>0)$ □□ $F'(x)=\frac{e-x}{ex}$ □

□ $F'(x)>0$ □□ $0<x<e$ □□ $F'(x)<0$ □□ $x>e$ □

□□ $F(x)$ □ $(0,e)$ □□□□□□□ $(e, +\infty)$ □□□□□□

□□ $F(x)\le F(e)=0$ □□ $\ln x\le\frac{x}{e}$.

□□ $f(x)-g(x)=\ln x-\frac{x^2}{e^2}+\frac{x}{e}-1\le-\frac{x^2}{e^2}+\frac{x}{e}-1=-\left(\frac{x}{e}-1\right)^2\le 0$.

□□□□ $x>0$□ $f(x)\le g(x)$ □□□□

□ $\frac{b}{a}$ □□□□□ $-e$.

□□□□

□□□□□□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□3□□□□□□□□□□□□.

2□□2021·□□□□·□□□□□□ $f(x)=e^x+(1+x)^a+\frac{a}{1+x}-a-2, g(x)=bx^2+x$ □□□ $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$.($e=2.718281828\cdots$ □□□□□□□□)

□1□□ $f(x)$ □□ $(0, f(0))$ □□□□□□□

□2□□ $a\ge 4$ □□ $f(x)\ge g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□.□ b □□□□□□□□ $M=\frac{b+12}{a}$ □□□□.

□□□□□1□ $x-y=0$ □□2□ $\frac{11}{2}$

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□ $h(x)=f(x)-g(x)$ □□ $h(0)=0$ □□□□□□ $h(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□ $h'(x)\ge 0$ □□ $h(0)=0$ □□ $h''(0)\ge 0$ □

$b\le\frac{a^2+a+1}{2}$ □□□□ $b_{max}=\frac{a^2+a+1}{2}$ □□□□ $M=\frac{b+12}{a}=\frac{a^2+a+25}{2a}=\frac{1}{2}(a+\frac{25}{a}+1)$ □□ $\varphi(a)=a+\frac{25}{a}+1(a\ge 4)$ □□□

□□□□□□□□□□□□

□□□□

□□□1□□ $f(x)=e^x+(1+x)^a+\frac{a}{1+x}-a-2$ □□ $f'(x)=e^x+a(1+x)^{a-1}-\frac{a}{(1+x)^2}$ □

□□ $f'(0)=e^0+a(1+0)^{a-1}-\frac{a}{(1+0)^2}=1+a-a=1$ □

□□ $f(0)=e^0+(1+0)^a+\frac{a}{1+0}-a-2=1+1+a-a-2=0$ □

□□ $f(x)$ □□ $(0,f(0))$ □□□□□□□ $y=x$ □□ $x-y=0$ □

□2□ $f(x)-g(x)=e^x+(1+x)^a+\frac{a}{1+x}-a-2-bx^2-x$ □

□ $h(x)=f(x)-g(x)$ □□ $h(0)=0$ □□□ $h(x)\ge 0$

$h'(x)=e^x+a(1+x)^{a-1}-\frac{a}{(1+x)^2}-2bx-1$ □ $h'(0)=e^0+a(1+0)^{a-1}-\frac{a}{(1+0)^2}-1=0$ □

□□ $h''(0)\ge 0$ □ $h''(x)=e^x+a(a-1)(1+x)^{a-2}+\frac{2a}{(1+x)^2}-2b$ □

□□ $h''(0)=e^0+a(a-1)(1+0)^{a-2}+\frac{2a}{(1+0)^2}-2b=a^2+a+1-2b\ge 0$ □

□□ $b\le\frac{a^2+a+1}{2}$ □□□ $b_{max}=\frac{a^2+a+1}{2}$ □

□□ $M=\frac{b+12}{a}=\frac{a^2+a+25}{2a}=\frac{1}{2}(a+\frac{25}{a}+1)$ □

□$\varphi(a)=a+\frac{25}{a}+1(a\geq 4)$□□$\varphi'(a)=1-\frac{25}{a^2}$□□$4\leq a<5$□□$\varphi'(a)<0$□□$a>5$□□$\varphi'(a)>0$□□□$\varphi(a)$□$[4,5)$□□

□□□□□$(5,+\infty)$□□□□□□

□□$\varphi(a)_{\min}=\varphi(5)=5+\frac{25}{5}+1=11$□□□$M=\frac{11}{2}$□

□□□$M=\frac{b+12}{a}$□□□□□$\frac{11}{2}$

□□□□

□□$b\leq\frac{a^2+a+1}{2}$□□□□

$M=\frac{b+12}{a}=\frac{a^2+a+25}{2a}=\frac{1}{2}(a+\frac{25}{a}+1)$□□$\varphi(a)=a+\frac{25}{a}+1(a\geq 4)$□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□

3□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□□$f(x)=ae^x$□x□

□1□□$f(x)$□□□□□□

□2□□□□x□□□$ae^x\geq x+b$□□□$x\in\mathbf{R}$□□□b□□□□□$\frac{b}{a}$□□□□.

□□□□1□□□□□□.□2□1

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□□1□□□□□□□□□□□□□□□□$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=1+\ln a\geq b$□□□$\frac{a}{b}\geq\frac{a}{1+lna}$□□$h(a)=\frac{a}{1+lna}$□□□□□□□□□

□□□□□□.

□□□□

□1□$f'(x)=ae^x$□1□

□$a\leq 0$□□$f'(x)<0$□$f(x)$□R□□□□□□

□$a>0$□□□$f'(x)=ae^x$□1=0□$x=$□lna□

在 $x>-\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

在 $x<-\ln a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，

所以，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,+\infty)$，无增区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,-\ln a)$，增区间为 $(-\ln a,+\infty)$.

（2）$f(x)=ae^x-x$，由题意 $f(x)_{min}\ge b$，

由（1）可知，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$在 R 上单调递减，无最小值，不符合题意，

当 $a>0$ 时，$f(x)_{min}=f(-\ln a)=1+\ln a\ge b$，

$\therefore \frac{a}{b}\ge\frac{a}{1+\ln a}$，

设 $h(a)=\frac{a}{1+\ln a}$，则 $h'(a)=\frac{\ln a}{(1+\ln a)^2}$，

$a\in(0,1]$，$h'(a)<0$；$a\in[1,+\infty)$，$h'(a)\ge 0$，

$\therefore h(a)_{min}=h(1)=1$.

所以$\frac{a}{b}$的最小值为1.

【点睛】

本题考查了导数和函数单调性的关系以及和最值的关系，考查了函数恒成立的问题，考查了运算能力和转化能力，属于中档题.

4.（2021·天津市滨海新区塘沽第一中学高三月考）已知函数 $f(x)=e^{ax}\sin x$.

（1）若 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，求实数a的取值范围；

（2）设 $a\ge 1$，若 $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，恒有 $f(x)\le bx$成立，求 $b-e^2a$的最小值.

【答案】（1）$[-1,+\infty)$；（2）$-\frac{2e^2}{\pi}$

【分析】

□1□□ $f(x)$ □ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ □□□□□□□ $f'(x)\ge 0$ □ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ □□□□□□□□□□□□□□ a □□□□□□

□2□□ $g(x)=f(x)-bx=e^{ax}\sin x-bx$ □ $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ □□□□□□□ b □□□□□□□ $b-e^{\frac{\pi}{2}}a\ge\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}}a-e^{\frac{\pi}{2}}a$ □□□ $b-e^{\frac{\pi}{2}}a$ □□□□.

□□□□

□□□1□□ $f(x)=e^{ax}\sin x$ □□ $f'(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)$ □

□ $f(x)$ □ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ □□□□□□□ $f'(x)\ge 0$ □ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ □□□□□

□ $a\sin x+\cos x\ge 0$ □ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ □□□□□

□ $x=0$ □□ $a\in R$ □□ $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ □□ $a\ge-\frac{1}{\tan x}$ □ $\therefore a\ge-1$ □

$\therefore a$ □□□□□□ $[-1,+\infty)$.

□2□□ $g(x)=f(x)-bx=e^{ax}\sin x-bx$ □ $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ □

□ $g'(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)-b$.

□ $h(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)-b$ □□ $h'(x)=e^{ax}\left[(a^2-1)\sin x+2a\cos x\right]\ge 0$ □

$\therefore h(x)$ □□□□□□ $g'(x)$ □ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ □□□□□□

$\therefore g'(x)\in\left[1-b,ae^{\frac{\pi}{2}a}-b\right]$.

□ $b\le 1$ □□ $g'(x)\ge 0$ □ $g(x)$ □ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ □□□□□□ $\therefore g(x)\ge g(0)=0$ □□□□□□□

□ $b\ge ae^{\frac{\pi}{2}a}$ □□ $g'(x)\le 0$ □ $g(x)$ □ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ □□□□□ $g(x)\le g(0)=0$ □□□□□

□ $1<b<ae^{\frac{\pi}{2}a}$ □□□ $g'(x)$ □□□□□□□□□

□ $g'(0)=1-b<0$ □ $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=ae^{\frac{\pi}{2}a}-b>0$ □

□□□□□□□□□□□□□□ x_0 □□□ $g'(x_0)=0$ □

□□ $g(x)$ □ $x\in[0,x_0]$ □□□□□□ $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$ □□□□□

□□□□ $g\left(\frac{\pi}{2}\right)\le 0$ □∴ $e^{\frac{\pi}{2}a}\le\frac{\pi}{2}b$ □

∴ $b\ge\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}$ □□□ $\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}\le b<ae^{\frac{\pi}{2}a}$ □

□□□ b □□□□□ $\left[\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a},+\infty\right)$ □

□□ $b-e^2a\ge\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2a$.

□ $G(a)=\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2a$ □□ $G'(a)=e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2$ □

□ $G'(a)=0$ □□ $a=\frac{4}{\pi}>1$ □

∴ $G(a)$ □ $\left[1,\frac{4}{\pi}\right]$ □□□□□□ $\left(\frac{4}{\pi},+\infty\right)$ □□□□□

□□ $G(a)\ge G\left(\frac{4}{\pi}\right)=-\frac{2e^2}{\pi}$ □

∴ $b-e^2a$ □□□□□ $-\frac{2e^2}{\pi}$.

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

5□□2021·□□□·□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\ln x$.

□1□□ $g(x)=f(x)-ax+1$ □□□ $g(x)$ □□□□

□2□□□□□ $f(x)\le(a-e)x+b$ □□□□□ e □□□□□□□□□ $\frac{b}{a}$ □□□.

□□□□1□□□□□2□ $-\frac{1}{e}$

□□□□

□□□□□1□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□ $g(x)=\ln x-ax+1$ □□ $g'(x)=\frac{1}{x}-a$ □□□□ $a\le 0$ □ $a>0$ □□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□ $F(x)=\ln x-(a-e)x-b$ □ $F'(x)=\frac{1}{x}+e-a$ □□ $a\le e$ □□□□□ $a>e$ □□□□□□□□□ $F\left(\frac{1}{a-e}\right)$ □□

$F\left(\frac{1}{a-e}\right)=-\ln(a-e)-b-1\le 0$ □□ $\frac{b}{a}\ge\frac{-1-\ln(a-e)}{a}(a>e)$ □□ $G(x)=\frac{-1-\ln(x-e)}{x}$ □ $x>e$ □□□□□.

□□□□□

□1□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□ $g(x)=\ln x-ax+1$ □□ $g'(x)=\frac{1}{x}-a$ □

① □ $a\le 0$ □□ $g'(x)>0$ □□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

② □ $a>0$ □□□ $g'(x)=0$ □□□ $x=\frac{1}{a}$ □

□ $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □ $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ □□□□□

□ $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □ $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□□□.

□2□□□ $F(x)=\ln x-(a-e)x-b$ □□□ e □□□□□□□□□

∴ $F(x)=\frac{1}{x}+e-a$ □ $x>0$ □

□ $a\le e$ □□ $F(x)>0$ □ $F(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□∴ $F(x)\le 0$ □□□□□□□

□ $a>e$ □□□ $F(x)=\frac{1}{x}+e-a=0$ □□ $x=\frac{1}{a-e}$,

∵□□□ $F(x)\le 0$ □□□□∴ $F(x)_{max}\le 0$ □

□ $x\in\left(0,\frac{1}{a-e}\right)$ □□ $F(x)>0$ □ $F(x)$ □□□□□

□ $x\in\left(\frac{1}{a-e},+\infty\right)$ □□ $F(x)<0$ □ $F(x)$ □□□□□

∴□ $x=\frac{1}{a-e}$ □□ $F(x)$ □□□□□ $F\left(\frac{1}{a-e}\right)=-\ln(a-e)-b-1\le 0$ □

∴□□ $\ln(a-e)+b+1\ge 0$ □□□∴ $b\ge -1-\ln(a-e)$ □

∴ $\frac{b}{a}\ge\frac{-1-\ln(a-e)}{a}(a>e)$ □

□ $G(x)=\frac{-1-\ln(x-e)}{x}$ □ $x>e$ □

$$G(x)=\frac{-\frac{x}{x-e}+1+\ln(x-e)}{x^2}=\frac{(x-e)\ln(x-e)-e}{(x-e)x^2}.$$

□ $H(x)=(x-e)\ln(x-e)-e$ □ $H(x)=\ln(x-e)+1$ □

□ $H(x)=0$ □□ $x=e+\frac{1}{e}$ □

□ $x\in\left(e+\frac{1}{e},+\infty\right)$ □□ $H(x)>0$ □ $H(x)$ □□□□□

□ $x\in\left(e,e+\frac{1}{e}\right)$ □□ $H(x)<0$ □ $H(x)$ □□□□□

∴□ $x=e+\frac{1}{e}$ □□ $H(x)$ □□□□ $H\left(e+\frac{1}{e}\right)=-e-\frac{1}{e}$ □

∵ $x\to e$ □□ $H(x)\to 0$ □ $x>2e$ □□ $H(x)>0$ □ $H(2e)=0$ □

∴□ $x\in(e,2e)$ □□ $G(x)<0$ □ $G(x)$ □□□□□

□ $x\in(2e,+\infty)$ □□ $G(x)>0$ □ $G(x)$ □□□□□

∴ $x=2e$ □□ $G(x)$ □□□□□ $G(2e)=\frac{-1-1}{2e}=-\frac{1}{e}$ □

∴ $\frac{b}{a}$ □□□□□ $-\frac{1}{e}$.

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□ $f(x)>0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)_{min}>0$ □□ $f(x)<0$ □□□ $\Leftrightarrow$ $f(x)_{max}<0$ □

□3□□ $f(x)>g(x)$ □□□□□□□□ $f(x)_{min}>g(x)_{max}$ □□□□□□□□□□□□.

6□□2021·□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=x^2,x>0$ □ $g(x)=ax+b$ □□□ $a,b\in R$

□1□□ $a+b=0$ □□ $f(x)$ □□□□ $g(x)$ □□□□□□□ a □□□

□2□□ $f(x)\geq g(x)$ □□□□ $x>0$ □□□□□ $a+b$ □□□□.

□□□□

□1□ $a=\frac{27}{4}$

□2□1

□□□□

□1□□□□□ $f'(x)=3x^2$ □□□□□□□□□□ $\begin{cases} a=3x_0^2 \\ y_0=x_0^3 \\ y_0=ax_0-a \end{cases}$ □□□□□.

□2□□ $\varphi(x)=x^3-ax-b$ □□□ $a\leq 0$ □ $a>0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $a+b\leq a-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$ □□

$h(a)=a-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}(a>0)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□1□

□□ $f(x)$ □□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□ (x_0, y_0) □

□ $f'(x)=3x^2$ □□□ $\begin{cases} a=3x_0^2 \\ y_0=x_0^3 \\ y_0=ax_0-a \end{cases}$ □□□ $x_0=\frac{3}{2}$ □ $a=\frac{27}{4}$.

□2□

□□ $f(x)\geq g(x)$ □□□ $x^3-ax-b\geq 0$ □□ $\varphi(x)=x^3-ax-b$ □ $\varphi'(x)=3x^2-a$.

□ $a\leq 0$ □□ $\varphi'(x)=3x^2-a>0$ □□□□□□□ x □□□□ $\varphi(x)$ □□□□□

□□ $\varphi(0)=-b\geq 0$ □ $b\leq 0$ □□□ $a+b\leq 0.$

□ $a>0$ □□□ $\varphi'(x)=0$ □□ $x=\sqrt{\frac{a}{3}}$ □

□□ $0<x<\sqrt{\frac{a}{3}}$ □□ $\varphi'(x)<0$ □□□□□□□□

□ $x>\sqrt{\frac{a}{3}}$ □□ $\varphi'(x)>0$ □□□□□□□.

□□□ $x=\sqrt{\frac{a}{3}}$ □□ $\varphi(x)$ □□□□ $\varphi(\sqrt{\frac{a}{3}})=-\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}-b=-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}-b$ □

□□ $-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}-b\geq 0$ □□ $b\leq -\frac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$ □□□ $a+b\leq a-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$ □

□ $h(a)=a-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}(a>0)$ □□ $h'(a)=1-\frac{\sqrt{3}}{3}a^{\frac{1}{2}}$ □ $h'(3)=0$ □

□ $0<a<3$ □□ $h'(a)>0$ □ $h(a)$ □□□□□

□ $a>3$ □□ $h'(a)<0$ □ $h(a)$ □□□□□

□□ $h(a)_{\max}=h(3)=1$ □□ $a+b\leq 1$ □□□ $a+b$ □□□□□1□□□ $a=3$ □ $b=-2$.

□□□□□ $a+b$ □□□□□1.

□□□□

□□.

7□□2021·□□□□·□□□□□ e □□□□□□□□□□□□ $f(x)=e^{x}$ □ $g(x)=mx+n$ □ $m,n\in\mathbf{R}$ □□

□1□□ $m+n=0$ □□ $f(x)$ □□□□ $g(x)$ □□□□□□□ m □□□

□2□□ $f(x)\geq g(x)$ □□□□ $x\in\mathbf{R}$ □□□□□ $m+n$ □□□□□

□□□□□1□ $m=e^{2}$ □□2□ e □

□□□□

□1□□□□□□□□□□□ (x_0,y_0) □□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□□□□□□□□□□□□ $\varphi(x)=e^{x}-mx-n$ □□□□□□□□□□ $m=0$, $m>0$ □□□□□□□□□□□ $m>0$ □ $n\leq m-m\ln m$ □□□□

□□□□□□□.

□□□□

□1□□□ $f(x)$ □□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□□ (x_0,y_0) □

□ $f(x)=e^x$ □□□ $\begin{cases} m=e^{x_0} \\ y_0=e^{x_0} \\ y_0=mx_0-m \end{cases}$ □□□ $x_0=2$ □ $m=e^2$ □

□□ $m=e^2$ □

□2□□□ $f(x)\ge g(x)$ □□□ $e^x-mx-n\ge 0$ □□ $\varphi(x)=e^x-mx-n$ □

□ $m<0$ □□ $\varphi(x)=e^x-mx-n$ □ R □□□□□□□□ $x\to-\infty$ □□ $e^x-mx-n\to-\infty$ □□□ $m<0$ □□□□□□

□ $m=0$ □□ $e^x-n\ge 0$ □□□□ $x\in\mathbf{R}$ □□□□

□□ $n\le 0$ □□ $m+n\le 0$ □□□ $m+n$ □□□□□ 0□

□ $m>0$ □□□□ $\varphi'(x)=e^x-m$ □□ $\varphi'(x)=0$ □□ $x=\ln m$ □

□□ $x>\ln m$ □□ $\varphi'(x)=e^x-m>0$ □□ $x<\ln m$ □□ $\varphi'(x)=e^x-m<0$ □

□□ $\varphi(x)$ □ $(\ln m,+\infty)$ □□□□□□□ $(-\infty,\ln m)$ □□□□□□

□□□ $x=\ln m$ □□ $\varphi(x)$ □□□□ $\varphi(\ln m)=m-m\ln m-n$ □

□□ $m-m\ln m-n\ge 0$ □□ $n\le m-m\ln m$ □

□□ $m+n\le 2m-m\ln m$ □

□ $H(m)=2m-m\ln m$ □ $m>0$ □□□ $H(m)=1-\ln m$ □

□□□ $0<m<e$ □□ $H(m)$ □□□□□□ $m>e$ □□ $H(m)$ □□□□□

□□ $H(m)_{max}=H(e)=e$ □□ $m+n\le e$ □□□ $m+n$ □□□□□ e□

□□□□□ $m+n$ □□□□□ e□

□□□□

□□

□□□□□□□□□□□□□.□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $\varphi(x)=e^x-mx-n$ □□□□□□□□□□ $m=0$, $m>0$ □□□□□□□□□.

8. (2021·辽宁·高三月考) 已知函数 $f(x)=(a+1)x-\ln x(a,b\in R)$.

(1) 若 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\le 0$ 有解，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $f(x)\ge b$ 恒成立，求 $b-a^2-a$ 的最大值.

【答案】(1) $(-\infty,\frac{1}{e}-1]$；(2) 1.

【分析】

(1) 把不等式 $f(x)\le 0$ 有解，转化为 $a+1\le\frac{\ln x}{x}$ 有解，设函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，利用导数求得函数 $h(x)$ 的单调性与最大值，即可求解；

(2) 求得导数 $f'(x)=a+1-\frac{1}{x}$，当 $a+1\le 0$ 时，$f'(x)\le 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减，与题意不符；当 $a+1>0$ 时，结合单调性得到 $f(x)_{min}=f\left(\frac{1}{a+1}\right)$，得到 $b-a^2-a\le 1+\ln(a+1)-a^2-a$，设函数 $g(x)=1+\ln(x+1)-x^2-x, x>-1$，利用导数求得函数的单调性与最值，即可求解.

【详解】

(1) 由题意，函数 $f(x)=(a+1)x-\ln x(a,b\in R)$，

因为 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\le 0$，可得 $f(x)=(a+1)x-\ln x\le 0$，即 $a+1\le\frac{\ln x}{x}$，

设函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，可得 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $h'(x)>0$，即 $1-\ln x>0$，解得 $0<x<e$；

令 $h'(x)<0$，即 $1-\ln x<0$，解得 $x>e$，

所以函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e)$，同理可求得单调递减区间为 $(e,+\infty)$.

所以 $h(x)_{max}=h(e)=\frac{1}{e}$，所以 $a+1\le\frac{1}{e}$，解得所以 $a\le\frac{1}{e}-1$，

即实数 a 的取值范围 $(-\infty,\frac{1}{e}-1]$.

□2□□□ $f(x)=(a+1)x-\ln x(a,b\in R)$ □□□ $f'(x)=a+1-\frac{1}{x}, x>0$ □

□ $a+1\le 0$ □□ $a\le -1$ □□ $f'(x)<0$ □□□□□ $f(x)$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□□

□□ $x\to +\infty$ □□ $f(x)\to -\infty$ □□□□□.

□ $a+1>0$ □□ $a>-1$ □□□ $f'(x)>0$ □□ $a+1>\frac{1}{x}$ □□□ $x>\frac{1}{a+1}$ □

□□ $f(x)$ □□□ $\left(\frac{1}{a+1},+\infty\right)$ □□□□□□□□ $\left(0,\frac{1}{a+1}\right)$ □□□□□

□□ $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a+1}\right)=(a+1)\cdot\frac{1}{a+1}-\ln\frac{1}{a+1}=1-\ln\frac{1}{a+1}=1+\ln(a+1)$

□□ $b\le 1+\ln(a+1)$ □□□ $b-a^2-a\le 1+\ln(a+1)-a^2-a$ □

□ $g(x)=1+\ln(x+1)-x^2-x, x>-1$ □

□□ $g'(x)=\frac{1}{x+1}-2x-1=\frac{1-(x+1)(2x+1)}{x+1}=\frac{-2x^2-3x}{x+1}$

□ $g'(x)>0$ □□ $2x^2+3x<0$ □□□ $-\frac{3}{2}<x<0,$

□□□ $x>-1$ □□□ $g(x)$ □□□ $(-1,0)$ □□□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□

□□ $g(x)_{\max}=g(0)=1+\ln 1-0-0=1$ □

□□□ $a=0,b=1$ □□ $b-a^2-a$ □□□□□ 1.

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

1□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

2□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

9□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=x^3+3ax+1$ □ $x\in[-1,1]$ □ $a\in R$ □

□1□□□□ $f(x)$ □□□ $[-1,1]$ □□□□□□ a □□□□□□

□2□□ $|f(x)|$ □□□□□

□3□□ $|f(x)+b|\le 1$ □□□ $x\in[-1,1]$ □□□□□ $a+b$ □□□□□□

□□□□□1□ $(-1,0)$ □□2□ $|f(x)|_{\max}=\begin{cases}-3a, a\le -1\\ -2a\sqrt{-a}+1, -1<a\le -\dfrac{1}{4}\\ 2+3a, a>-\dfrac{1}{4}\end{cases}$ □□3□ $\left[-2,-\dfrac{1}{2}\right]$ □

□□□□

□1□□□□□□□□□□□ $f(x)$ □ $(-1,1)$ □□□□□□□□□□□□□□ a □□□□□□□□□□□□□□ a □□□□□□

□2□□□□ a □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□ $[-1,1]$ □□□□□□□□□□□ $|f(x)|$ □□□□□

□3□□□□□□ $-2-2a\sqrt{-a}+a\le a+b\le a+2a\sqrt{-a}$ □□ $t=\sqrt{-a}\in\left[\dfrac{1}{2},\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right]$ □□□□ $2t^3-t^2-2\le a+b\le -2t^3-t^2$ □□□□□

□□□ $y=-2+2t^3-t^2$ □□□ $\left[\dfrac{1}{2},\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right]$ □□□□□□□□□□□ $y=-t^2-2t^3$ □□□ $\left[\dfrac{1}{2},\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right]$ □□□□□□□□□□□□ $a+b$ □□□□□.

□□□□

□1□□□□□□□□□□ $f(x)$ □ $(-1,1)$ □□□□□□

$f(x)=x^3+3ax+1$ □□ $f'(x)=3x^2+3a$ □

□□□□□ $f'(x)$ □ $(-1,0)$ □□□□□ $(0,1)$ □□□□

□□□ $\begin{cases}f'(1)=3+3a>0\\ f'(0)=3a<0\end{cases}$ □□□ $-1<a<0$ □

(2) 若 $a\le -1$ 时，对任意的 $x\in[-1,1]$，$f'(x)\le 0$，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上递减，$f(-1)=-3a>0$，$f(1)=2+3a$，

$[f(1)]^2-[f(-1)]^2=(2+3a)^2-9a^2=12a+4<0$，

所以，$|f(1)|<|f(-1)|$，则 $|f(x)|_{max}=|f(-1)|=-3a$；

若 $a\ge 0$，对任意的 $x\in[-1,1]$，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上递增，

$f(-1)=-3a$，$f(1)=2+3a>0$，$[f(1)]^2-[f(-1)]^2=(2+3a)^2-9a^2=12a+4>0$，

所以，$|f(1)|>|f(-1)|$，则 $|f(x)|_{max}=|f(1)|=2+3a$；

若 $-1<a<0$，由 $f'(x)>0$，可得 $-1<x<-\sqrt{-a}$ 或 $\sqrt{-a}<x<1$；由 $f'(x)<0$，可得 $-\sqrt{-a}<x<\sqrt{-a}$.

则 $f(x)$ 在 $(-1,-\sqrt{-a})$ 上递增，在 $(-\sqrt{-a},\sqrt{-a})$ 上递减，在 $(\sqrt{-a},1)$ 上递增；

$f(-1)=-3a>0$，$f(-\sqrt{-a})=-2a\sqrt{-a}+1$，$f(\sqrt{-a})=2a\sqrt{-a}+1$，$f(1)=2+3a$.

因为 $f(x)+f(-x)=x^3+3ax+1-x^3-3ax+1=2$，所以，函数 $f(x)$ 关于 $(0,1)$ 对称，

$|f(-\sqrt{-a})|=-2a\sqrt{-a}+1=|2a\sqrt{-a}|+1\ge|2a\sqrt{-a}+1|=|f(\sqrt{-a})|$，

则 $|f(x)|_{max}=\max\{-2a\sqrt{-a}+1,|2+3a|\}$，

若 $-1<a\le-\frac{2}{3}$，$2+3a\le 0$，$(-2a\sqrt{-a}+1)-|2+3a|=(-2a\sqrt{-a}+1)+(2+3a)=-2a\sqrt{-a}+(3+3a)>0$，

则 $|f(x)|_{max}=\max\{-2a\sqrt{-a}+1,|2+3a|\}=-2a\sqrt{-a}+1$；

若 $-\frac{2}{3}<a\le-\frac{1}{4}$，$2+3a>0$，$(-2a\sqrt{-a}+1)-(2+3a)=(2\sqrt{-a}-1)(\sqrt{-a}+1)^2\ge 0$，

则 $-2a\sqrt{-a}+1\ge 2+3a$，则 $|f(x)|_{max}=-2a\sqrt{-a}+1$；

若 $-\frac{1}{4}<a<0$，$2+3a>0$，$(-2a\sqrt{-a}+1)-(2+3a)=(2\sqrt{-a}-1)(\sqrt{-a}+1)^2<0$，

□$-2a\sqrt{-a}+1<2+3a$□□$|f(x)|_{max}=2+3a$.

□□$|f(x)|_{max}=\begin{cases}-3a, a\le -1\\ -2a\sqrt{-a}+1, -1<a\le -\frac{1}{4}\\ 2+3a, a>-\frac{1}{4}\end{cases}$□

□3□□□□□□□□$|f(x)+b|\le 1$□□□$x\in[-1,1]$□□□□

□□□□□□$f(x)_{max}-f(x)_{min}\le 2$.

①□$a\le -1$□$f(x)_{max}-f(x)_{min}=-3a-(3a+2)=-6a-2\le 2$□□□$a\ge -\frac{2}{3}$□□□□□□□

②□$a\ge 0$□$f(x)_{max}-f(x)_{min}=(3a+2)+3a=6a+2\le 2$□□□$a\le 0$□□□$a=0$□

③□$-1<a<0$□□$\begin{cases}f(-\sqrt{-a})-f(\sqrt{-a})=-4a\sqrt{-a}\le 2\\ f(1)-f(-1)=6a+2\le 2\end{cases}$□□□$-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\le a\le 0$□□□$-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\le a<0$.

□□$-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\le a\le 0$□□□□□$f(x)$□$[-1,-\sqrt{-a})$□□□□□□$(-\sqrt{-a},\sqrt{-a})$□□□□□□$(\sqrt{-a},1]$□□□□□.

□$-\frac{1}{4}\le a\le 0$□□□2□□□□$f(x)_{max}=2+3a$□□$f(x)_{min}=f(-1)=-3a$□

□$\begin{cases}f(x)_{max}+b\le 1\\ f(x)_{min}+b\ge -1\end{cases}$□□$\begin{cases}b+2+3a\le 1\\ -3a+b\ge -1\end{cases}\Rightarrow -1+4a\le a+b\le -1-2a$□□□$a+b\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$

□$-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\le a\le -\frac{1}{4}$□□$f(x)_{max}=-2a\sqrt{-a}+1$□$f(x)_{min}=2a\sqrt{-a}+1$□

□$\begin{cases}f(x)_{max}+b\le 1\\ f(x)_{min}+b\ge -1\end{cases}$□□$\begin{cases}-2a\sqrt{-a}+1+b\le 1\\ 2a\sqrt{-a}+1+b\ge -1\end{cases}$□

□$-2-2a\sqrt{-a}+a\le a+b\le a+2a\sqrt{-a}$□

□$t=\sqrt{-a}\in\left[\frac{1}{2},\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$□□$2t^3-t^2-2\le a+b\le -2t^3-t^2$□

□□□□ $g(t)=-2+2t^3-t^2$ □ $g'(t)=6t^2-2t=2t(3t-1)>0$ □□□□ $t\in\left[\frac{1}{2},\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$ □□□□

□□□□□ $g(t)$ □ $\left[\frac{1}{2},\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$ □□□□□□□□□ $g(t)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-2$ □

□□□□ $h(t)=-t^2-2t^3$ □ $h'(t)=-2t-6t^2<0$ □□□□ $t\in\left[\frac{1}{2},\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$ □□□□

□□□□□ $h(t)$ □□□ $\left[\frac{1}{2},\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$ □□□□□□□□ $h(t)_{\max}=h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ □

□□□ $a+b\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$.

□□□ $a+b\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$.

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□1□□□ $f(x)$ □□□ D □□□□□ $\Leftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ □□□ D □□□□□

□2□□□ $f(x)$ □□□ D □□□□□ $\Leftrightarrow$ $f'(x)\leq 0$ □□□ D □□□□□

□3□□□ $f(x)$ □□□ D □□□□ $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ □□□ D □□□□□□□□

□4□□□ $f(x)$ □□□ D □□□□□□□□□ $\Leftrightarrow \exists x\in D$ □□□ $f'(x)>0$ □□□

□5□□□ $f(x)$ □□□ D □□□□□□□□□ $\Leftrightarrow \exists x\in D$ □□□ $f'(x)<0$ □□.

10□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=x^2+x-\ln(ax+b)$ □ $a\in R$ □ $a\neq 0$ □

(1)□ $a=1$ □ $b=0$ □□□□□ $f(x)>\frac{5}{4}$ □

(2)□ $f(x)\geq x^2$ □□□□□ ab □□□□□

□□□□(1)□□□□□(2) $\frac{e}{2}$□

□□□□

(1)□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□

(2)□□□□□□ $a>0$ □□□□□□□□ $\ln(ax+b)-x\le 0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□ ab □□□□□□□□□□□□.

□□□□

(1)□□□□ $a=1$□$b=0$□□ $f(x)=x^2+x-\ln x$□$x>0$□

□□ $f(x)=2x+1-\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(x+1)}{x}$□$x>0$□

□□□ $x>\frac{1}{2}$□□ $f(x)>0$□□ $0<x<\frac{1}{2}$□□ $f(x)<0$□ $f(x)$ □ $(0,\frac{1}{2})$ □□□□□ $(\frac{1}{2},+\infty)$ □□□□

□□□□□□ $x=\frac{1}{2}$□□ $f(x)$ □□□□ $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}+\ln 2$□

□□ $f(\frac{1}{2})-\frac{5}{4}=-\frac{1}{2}+\ln 2=\frac{1}{2}(\ln 4-1)>0$□□□ $f(x)>\frac{5}{4}$□

(2)□□□□ $f(x)\ge x^2 \Leftrightarrow x^2+x-\ln(ax+b)\ge x^2 \Leftrightarrow \ln(ax+b)-x\le 0$□

□ $h(x)=\ln(ax+b)-x$ □□□ $h(x)\le 0$ □□□□

□ $a<0$ □□□□□□□□ b□□ $x<0$□ $x<\frac{1-b}{a}$ □□□ $ax+b>1$□ $h(x)>0$□□□□

□□ $a>0$□ $h(x)=\frac{a}{ax+b}-1=\frac{-a(x-\frac{a-b}{a})}{ax+b}$□□ $ax+b>0$□

□ $-\frac{b}{a}<x<\frac{a-b}{a}$ □□ $h(x)>0$□□ $x>\frac{a-b}{a}$ □□ $h(x)<0$□

□□ $h(x)$ □ $(-\frac{b}{a},\frac{a-b}{a})$ □□□□□□□ $(\frac{a-b}{a},+\infty)$ □□□□□

□ $h(x)$ □ $x=\frac{a-b}{a}$ □□□□□ $h(\frac{a-b}{a})=\ln a-\frac{a-b}{a}$□

□□ $h(x)\le 0\Leftrightarrow \ln a-\frac{a-b}{a}\le 0\Leftrightarrow b\le a-a\ln a$□□□ $ab\le a^2-a^2\ln a=a^2-\frac{1}{2}a^2\ln a^2$□

□ $t=a^2>0,\varphi(t)=t-\frac{1}{2}t\ln t$ □□ $\varphi'(t)=\frac{1}{2}(1-\ln t)$ □

$0<t<e$ □ $\varphi'(t)>0$ □ $t>e$ □ $\varphi'(t)<0$ □ $\varphi(t)$ □ $(0,e)$ □□□□□□ $(e,+\infty)$ □□□□□

□□ $\varphi(t)=t-\frac{1}{2}t\ln t$ □ $t=e$ □□ $\varphi(t)$ □□□□ $\varphi(e)=e-\frac{1}{2}e\ln e=\frac{e}{2}$ □□□□ $a^2=e$ □□ $a=\sqrt{e},b=\frac{\sqrt{e}}{2}$ □□“=”□

□ ab □□□□ $\frac{e}{2}$ □

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

(1)□□□□□□□□□□□□□□□□□,□□□□□□□□□□

(2)□□□□□□□□□□□□□□

(3)□□□□□□□□□□□,□□□□□□□□

(4)□□□□□□□,□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

11□□2021·□□·□□□□□□□□□□ $f(x)=ke^x-x-1$ □ $k\in\mathrm{R}$.

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□ x □□□ $f(x)\le xe^x-e^x+m$ □□□ $x\in[0,1]$ □□□ k □□□□□ n □□□ $m\in[1,2]$ □ $m+n$ □□□□□.

□□□□1□□□□□□□2□ $\left[2,\frac{4}{e}+2\right]$.

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□;

□2□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□□□□

□□□1□ $f'(x)=ke^x-1$

□ $k\le 0$ □□ $f'(x)<0$ □□ $f(x)$ □ $(-\infty,+\infty)$ □□□□

□ $k>0$ □□□ $f'(x)=0$ □□□ $x=\ln\frac{1}{k}$ □

□ $x\in\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ □ $f'(x)<0$ □ $x\in\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□ $f'(x)>0$ □

□□ $f(x)$ □ $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□□□□ $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□□□.

□2□□□ x □□□□ $f(x)\le xe^x-e^x+m$ □ $\forall x\in[0,1]$ □□□□

□□ $k\le x-1+\frac{m+x+1}{e^x}$ □□ $\forall x\in[0,1]$ □□□□

□ $g(x)=x-1+\frac{m+x+1}{e^x}$ □

□ $g'(x)=\frac{e^x-x-m}{e^x}$ □

□ $p(x)=e^x-x-m$ □□ $p'(x)=e^x-1\ge 0$ □

□□ $p(x)$ □ $x\in[0,1]$ □□□□

① □ $p(0)\ge 0$ □□ m£1 □□

□□ $m\in[1,2]$ □□□ $m=1$ □

□ $x\in[0,1]$ □ $p(x)\ge 0$ □□ $g'(x)$ ³ 0 □□□ $g(x)$ □ $[0,1]$ □□□□

□□ $n=g(x)_{\min}=g(0)=1$ □

□ $n+m=2$ □

② □ $p(1)\le 0$ □ $m\in[e-1,2]$ □□

□□ $x\in[0,1]$ □ $p(x)\le 0$ □□ $g'(x)\le 0$ □

□□ $g(x)$ □ $x\in[0,1]$ □□□□□□ $n=g(x)_{\min}=g(1)=\frac{m+2}{e}$ □

□ $n+m=\frac{m+2}{e}+m\in\left[e+\frac{1}{e},\frac{4}{e}+2\right]$ □

③□ $p(0)p(1)<0$ □□ $m\in(1,e-1)$ □□

□□ $p(x)=e^x-x-m$ □ $[0,1]$ □□□□

□□□□□□□ $x_0\in(0,1)$ □□□ $p(x_0)=0$ □□ $m=e^{x_0}-x_0$ □

□□ $x\in(0,x_0)$ □□ $p(x)<0$ □□ $g'(x)<0$ □

□ $x\in(x_0,1)$ □□ $p(x)>0$ □□ $g'(x)>0$ □

□ $g(x)$ □ $(0,x_0)$ □□□□ $(x_0,1)$ □□□□

□□ $n=g(x)_{\min}=g(x_0)=x_0-1+\frac{m+x_0+1}{e^{x_0}}=x_0+\frac{1}{e^{x_0}}$ □

□□ $n+m=x_0+\frac{1}{e^{x_0}}+m=x_0+\frac{1}{e^{x_0}}+ex_0-x_0=e^{x_0}+\frac{1}{e^{x_0}}$ □

□ $u(x)=e^x+\frac{1}{e^x}(x\in(0,1))$ □□ $u'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}>0$ □

□□ $u(x)$ □ $[0,1]$ □□□□□□ $n+m\in\left(2,e+\frac{1}{e}\right)$.

□□□□□ $n+m\in\left[2,\frac{4}{e}+2\right]$.

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□①□□□□□□□□□□②□□□□□□□□□③□□□.

12□□2021·□□·□□□□□□□□□□□ $f(x)=x-\frac{1}{x}-m\ln x-m$ □□□ $m\in[1,e]$ □ e □□□□□□□□

□I□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□

□II□□□□ x □□□□ $f(x)\le x\ln x-\frac{1}{x}-kx+n$ □ $\forall x\in[1,e]$ □□□□ k □□□□□ $c(k\in R, n\in[1,e))$ □□ $n+c$ □□□□□□

□□□□□I□□□□□□II□ $n+c\in\left[2,e+\frac{2}{e}+1\right]$.

□□□□

□I□□□□□□□□□□□ $\Delta\le 0$ □ $\Delta>0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□

□II□□□□□□□□□ $k\le\frac{m(1+\ln x)-x+x\ln x+n}{x}$ □ $\forall x\in[1,e]$ □□□□□ $g(x)=\frac{1+\ln x-x+x\ln x+n}{x}$ □□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□□□□

□I□□□ $f(x)=x-\frac{1}{x}-m\ln x-m(x>0,m\in[1,e])$ □

□□ $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{m}{x}=\frac{x^2-mx+1}{x^2}$ □□□ $x>0$ □ $m\in[1,e]$ □

□□①□ $\Delta=m^2-4\le 0$ □ $1\le m\le 2$ □□ $x^2-mx+1\ge 0$ □□□□ $f'(x)\ge 0$ □□□

□□ $f(x)$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□□□ $(0,+\infty)$ □

② □ $\Delta=m^2-4>0$ □ $2<m\le e$ □□□ $x^2-mx+1=0$ □□□□

$x_1=\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ □ $x_2=\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ □□ $x_1<x_2$ □

□ $f'(x)=\frac{x^2-mx+1}{x^2}>0$ □ $x>\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ □ $0<x<\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ □

□ $f'(x)=\frac{x^2-mx+1}{x^2}<0$ □ $\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}<x<\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ □

□ $f(x)$ □□□□□□□ $\left(0,\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$ □ $\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2},+\infty\right)$ □

□□□ $1\le m\le 2$ □□ $f(x)$ □□□□ $(0,+\infty)$ □

②□ $2<m\le e$ □□ $f(x)$ □□□□□ $\left(0,\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$ □ $\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2},+\infty\right)$ □

□II□□□ x □□□□ $f(x)\le x\ln x-\frac{1}{x}-kx+n$ □ $\forall x\in[1,e]$ □□□□□□□ $k\le\frac{m(1+\ln x)-x+x\ln x+n}{x}$ □ $\forall x\in[1,e]$ □□□□

□□ $m\in[1,e]$ □ $x\in[1,e]$ □□□ $\frac{m(1+\ln x)-x+x\ln x+n}{x}\ge\frac{1+\ln x-x+x\ln x+n}{x}$ □

□ $g(x)=\frac{1+\ln x-x+x\ln x+n}{x}$ □

□ $g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}-1+\ln x+1\right)x-1-\ln x+x-x\ln x-n}{x^2}=\frac{-\ln x+x-n}{x^2}$ □

□ $p(x)=-\ln x+x-n$ □□ $p'(x)=-\frac{1}{x}+1>0$ □ $x\in[1,e]$ □□□□□

□□ $p(x)$ □ $x\in[1,e]$ □□□□□ $p(1)\le p(x)\le p(e)$ □□ $1-n\le p(x)\le -1+e-n$ □

①□ $p(1)\ge 0$ □□ $n\le 1$ □□

□□ $n\in[1,e]$ □□□ $n=1$ □

□ $x\in[1,e]$ □ $p(x)\ge 0$ □□ $g'(x)\ge 0$ □□□ $g(x)$ □ $[1,e]$ □□□□

□□ $c=g(x)_{\min}=g(1)=n$ □

□ $n+c=2n=2$ □

②□ $p(e)\le 0$ □ $n\in[e-1,e]$ □□

□□ $x\in[1,e]$ □ $p(x)\le 0$ □□ $g'(x)\le 0$ □

□□ $g(x)$ □ $[1,e]$ □□□□□□ $c=g(x)_{\min}=g(e)=\frac{n+2}{e}$ □

□ $n+c=\frac{n+2}{e}+n\in\left[e+\frac{1}{e},e+\frac{2}{e}+1\right]$ □

③□ $p(1)p(e)<0$ □□ $n\in(1,e-1)$ □□

□□ $p(x)=-\ln x+x-n$ □ $[1,e]$ □□□□

□□□□□□□□ $x_0\in(1,e)$ □□□ $p(x_0)=0$ □□ $n=x_0-\ln x_0$ □

□□ $x\in(1,x_0)$ □□ $p(x)<0$ □□ $g'(x)<0$ □

□ $x\in(x_0,e)$ □□ $p(x)>0$ □□ $g'(x)>0$ □

□ $g(x)$ □ $(1,x_0)$ □□□□ (x_0,e) □□□□

□□ $c=g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{1+\ln x_0-x_0+x_0\ln x_0+n}{x_0}=\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}$ □

□□ $n+c=\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}+x_0-\ln x_0=x_0+\dfrac{1}{x_0}$ □

□ $u(x)=x_0+\dfrac{1}{x_0}(x_0\in(1,e))$ □□ $u'(x)=1-\dfrac{1}{x_0^2}=\dfrac{x_0^2-1}{x_0}>0$ □

□□ $u(x)$ □ $[1,e]$ □□□□□□ $n+c\in\left(2,e+\dfrac{1}{e}\right)$ □

□□□□□ $n+c\in\left(2,e+\dfrac{2}{e}+1\right)$ □

□□□□

□□□□□

□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

13．（2021·□□·□□□□□□□□□□□）□□ $f(x)=e^x-ax+\dfrac{1}{2}x^2$，□□ $a>-1$

（1）□□ $a=0$ □□□□□ $y=f(x)$ □□ $(0,f(0))$ □□□□□□□

（2）□□ $a=1$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□□

（3）□□ $f(x)\ge\dfrac{1}{2}x^2+x+b$ □□ $x\in\mathbf{R}$ □□□□□ $b-a$ □□□□.

【答案】（1）$x-y+1=0$；（2）增区间为 $(0,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,0)$；（3）$1+\frac{1}{e}$.

【分析】

（1）当 $a=0$ 时，求得 $f'(x)=e^x+x$，得到 $f(0)=1$，$f'(0)=1$，即可求得切线的方程；

（2）当 $a=1$ 时，求得 $f'(x)=e^x-1+x$，令 $g(x)=e^x-1+x$，得到 $g'(x)>0$，结合 $g(0)=0$，再根据导数的符号，即可求得函数的单调区间；

（3）由题意得到 $e^x-(a+1)x-b\geq 0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立，设 $g(x)=e^x-(a+1)x-b$，利用导数求得函数的单调区间和最值，得到 $b-a\leq 1-(a+1)\ln(a+1)$，设 $h(x)=1-x\ln x(x>0)$，利用导数求得函数 $h(x)$ 的单调性与最值，即可求解.

【详解】

（1）当 $a=0$ 时，函数 $f(x)=e^x+\frac{1}{2}x^2$，可得 $f'(x)=e^x+x$，则 $f(0)=1$，$f'(0)=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $x-y+1=0$.

（2）当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$，可得 $f'(x)=e^x-1+x$，

令 $g(x)=e^x-1+x$，则 $g'(x)=e^x+1>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

又由 $g(0)=f'(0)=0$，

则令 $f'(x)=e^x-1+x>0$，可得 $x>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

令 $f'(x)=e^x-1+x<0$，可得 $x<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

综上，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$.

（3）由 $f(x)\geq\frac{1}{2}x^2+x+b$，得 $e^x-(a+1)x-b\geq 0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立，

设 $g(x)=e^x-(a+1)x-b$，则 $g'(x)=e^x-(a+1)$，

由 $g'(x)=e^x-(a+1)=0$，解得 $x=\ln(a+1)$，（其中 $a>-1$），

□□ x □□□ $g'(x)$ □ $g(x)$ □□□□□□□□□□□

x	$(-\infty,\ln(a+1))$	$\ln(a+1)$	$(\ln(a+1),+\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	□□□	↗

□□ $g(x)$ □ $(-\infty,\ln(a+1))$ □□□□□□□ $(\ln(a+1),+\infty)$ □□□□□.

□□□□ $g(x)$ □□□□□ $g(\ln(a+1))=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b$.

□□□□ $g(\ln(a+1))\ge 0$ □□ $b-a\le 1-(a+1)\ln(a+1)$.

□ $h(x)=1-x\ln x(x>0)$ □□ $h'(x)=-\ln x-1$.

□□□ $0<x<\frac{1}{e}$ □□ $-\ln x-1>0$ □ □ $x>\frac{1}{e}$ □□ $-\ln x-1<0$ □

□□ $h(x)$ □ $(0,\frac{1}{e})$ □□□□□□□ $(\frac{1}{e},+\infty)$ □□□□□□

□□□ $x=\frac{1}{e}$ □□ $h(x)_{max}=h(\frac{1}{e})=1+\frac{1}{e}$.

□□□ $a+1=\frac{1}{e}$ □ $b=a+1-(a+1)\ln(a+1)$ □□ $a=\frac{1}{e}-1$ □ $b=\frac{2}{e}$ □□ $b-a$ □□□□□ $1+\frac{1}{e}$.

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

1□□

2□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

14□□2021·□□□·□□□□□□□□□□□□ $f(x)=-a\ln x+(a+1)x-\frac{1}{2}x^2(a>0)$.

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $f(x)\ge -\frac{1}{2}x^2+ax+b$ □□□□□□□ ab □□□□.

□□□□(1) □ $a=1$ □□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□ $0<a<1$ □ $f(x)$ □□□□□□□□ $(a,1)$ □□□□□□□□ $(0□a)$ □ $(1,+\infty)$ □□

$a>1$□ $f(x)$ □□□□□□□□$(1,a)$□□□□□□□□$(0,1)$□$(a,+\infty)$□□2□$\frac{e}{2}$.

□□□□

□□□□□1□□□ $f(x)$ □□□□□□ $a=1, 0<a<1, a>1$ □□□□□□□ $f'(x)>0$ □□□□□ $f'(x)<0$ □□□□□2□□□□□□

$a\ln x-x+b\le 0$□□□□□ $g(x)=a\ln x-x+b$ □□.

□□□□□1□ $f(x)=-\frac{a}{x}+a+1-x=\frac{-x^2+(a+1)x-a}{x}=\frac{(x-a)(-x+1)}{x}$□

$f(x)=\frac{-a}{x}+(a+1)-x=-\frac{(x-a)(x-1)}{x}$□

① □$a=1$□□ $f(x)=-\frac{(x-a)(x-1)}{x}\le 0$□∴ $f(x)$ □$(0,+\infty)$□□□□□

② □$0<a<1$□□ $f(x)>0$□□$a<x<1$□∴ $f(x)$ □□□□□□□□$(a,1)$□

□□□□□□□$(0,a)$□$(1,+\infty)$□

③ □$a>1$□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□$(1,a)$□□□□□□□□$(0,1)$□$(a,+\infty)$.

□2□∵ $f(x)\ge -\frac{1}{2}x^2+ax+b$□□□□∴ $-a\ln x+(a+1)x-\frac{1}{2}x^2\ge -\frac{1}{2}x^2+ax+b$□□□□

□$a\ln x-x+b\le 0$□□□□

$g(x)=a\ln x-x+b(x>0)$, $g'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$□

∴ $g(x)$ □$(0,a)$□□□□$(a,+\infty)$□□□□∴ $g(x)_{\max}=g(a)=a\ln a-a+b\le 0$□

∴ $b\le a-a\ln a$□∴ $ab\le a^2-a^2\ln a$□

□$h(x)=x^2-x^2\ln x(x>0)$, $h'(x)=x-2x\ln x=x(1-2\ln x)$□

∴ $h(x)$ □$\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right)$□□□□$\left(e^{\frac{1}{2}},+\infty\right)$□□□□

∴ $h(x)_{\max}=h\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{e}{2}$ □∴ $ab\le\frac{e}{2}$ □∴□□ ab □□□□□ $\frac{e}{2}$.

15□□2021·□□□□·□□□□□□□ $f(x)=e^{x}+x^{2}-x$ □ $g(x)=x^{2}+ax+b$ □ $a,b\in\mathbf{R}$.

□Ⅰ□□ $a=1$ □□□□□ $F(x)=f(x)-g(x)$ □□□□□□

□Ⅱ□□□□ $y=f(x)$ □□ $(0,1)$ □□□□ l □□□ $y=g(x)$ □□□ $(1,c)$ □□ a,b,c □□□

□Ⅲ□□ $f(x)\ge g(x)$ □□□□□ $a+b$ □□□□.

□□□□□Ⅰ□□□□□□□Ⅱ□ $a=-2,b=2,c=1.$ □Ⅲ□ $e-1$

□□□□

□Ⅰ□ $F(x)=e^{x}-2x-b$ □□ $F'(x)=e^{x}-2$.

□ $F'(x)=e^{x}-2>0$, □ $x>\ln 2$ □□□ $F(x)$ □ $(\ln 2,+\infty)$ □□□□□.

□ $F'(x)=e^{x}-2<0$, □ $x<\ln 2$ □□□ $F(x)$ □ $(-\infty,\ln 2)$ □□□□□.

□Ⅱ□□□ $f'(x)=e^{x}+2x-1$ □□□ $f'(0)=0$ □□□ l □□□□ $y=1$.

□□□□ $-\frac{a}{2}=1$ □ $c=1$.

□□ l □□□□ $g(x)=x^{2}-2x+b$ □□□ $(1,1)$ □

□ $1^{2}-2+b=1$ □ $b=2$.

□□ $a=-2,b=2,c=1.$

□Ⅲ□□ $h(x)=f(x)-g(x)=e^{x}-(a+1)x-b$,□ $h(x)\ge 0$ □□□.

□□ $h'(x)=e^{x}-(a+1)$.

□1□□ $a+1\le 0$ □□

因为 $h'(x)>0$，所以此时 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

① 若 $a+1=0$，则当 $b\le 0$ 时满足条件，此时 $a+b\le -1$;

② 若 $a+1<0$，取 $x_0<0$ 且 $x_0<\frac{1-b}{a+1}$,

此时 $h(x_0)=e^{x_0}-(a+1)x_0-b<1-(a+1)\frac{1-b}{a+1}-b=0$，所以 $h(x)\ge 0$ 不恒成立.

不满足条件;

(2) 当 $a+1>0$ 时,

令 $h'(x)=0$，得 $x=\ln(a+1)$. 由 $h'(x)>0$，得 $x>\ln(a+1)$;

由 $h'(x)<0$，得 $x<\ln(a+1)$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a+1))$ 上单调递减，在 $(\ln(a+1),+\infty)$ 上单调递增.

要使得"$h(x)=e^x-(a+1)x-b\ge 0$ 恒成立"，必须有

"当 $x=\ln(a+1)$ 时，$h(x)_{min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\ge 0$"成立.

所以 $b\le(a+1)-(a+1)\ln(a+1)$.则 $a+b\le 2(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-1$.

令 $G(x)=2x-x\ln x-1, x>0$，则 $G'(x)=1-\ln x$

令 $G'(x)=0$，得 $x=e$ 由 $G'(x)>0$，得 $0<x<e$;

由 $G'(x)<0$，得 $x>e$ 所以 $G(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,

所以，当 $x=e$ 时，$G(x)_{max}=e-1$.

从而，当 $a=e-1, b=0$ 时，$a+b$ 的最大值为 $e-1$.-

【点睛】

利用导数解决不等式恒成立问题的"两种"常用方法

(1) 分离参数法：将原不等式分离参数，转化为不含参数的函数的最值问题，利用导数求该函数的最值，根据要求得所求范围.一般地，$f(x)\ge a$ 恒成立，只需 $f(x)_{min}\ge a$ 即可；$f(x)\le a$ 恒成立，只需 $f(x)_{max}\le a$ 即可.

(2)函数思想法：将不等式转化为某含待求参数的函数的最值问题，利用导数求该函数的极值(最值)，然后构建不等式求解.